

Application de la factorisation

Franck Le Pargneux

6 septembre 2009

Nous savons depuis plus d'une année résoudre les équations du 1er degré. Le principe est de mettre les "x" d'un côté, les nombres de l'autre, puis de diviser le nombre par la quantité de "x".

Exemple 0.1 $3x - 7 = 5x + 2$

$$\begin{aligned} -2x &= 9 \\ x &= \frac{-9}{2} \end{aligned}$$

En revanche, comment résoudre les équations comportant une quantité de x^2 ? Certaines de ces équations (dites du second degré) comportent des solutions intuitives, qui souvent sont incomplètes.

Exemple 0.2 $x^2 = 36$

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{36} \\ x &= 6 \end{aligned}$$

En vérifiant, on constate bien que $6^2 = 36$, ce qui signifie que notre solution est correcte. Mais $(-6)^2 = -6 \times (-6) = 36$. Dans notre résolution (naïve), nous avons donc (au mieux) oublié une solution. Mais comment résoudre les équations du second degré ?

Nous allons durant ce cours tenter de répondre à cette question en utilisant le principe de résolution des équations produits. Il faudra par conséquent être capable de ramener une forme développée (avec des x^2) en une forme factorisée (double ou triple produit), ce qui s'appelle factoriser. Nous apprendrons alors à résoudre n'importe quelle type d'équation du second degré. Nous verrons ensuite une autre application de la factorisation : déterminer le signe d'une expression du second degré. Ce chapitre sera clos par un paragraphe d'exercices qui vous permettront de vous tester.

1 Équations du second degré sous forme factorisée

Les équations du second degré sont les équations contenant du x^2 . Leur résolution est basée sur un principe très différent de celui des équation du premier degré. En effet, on fait passer toutes les quantités d'un côté pour essayer de trouver une forme factorisée et utiliser la proposition suivante :

Proposition 1 *Si un produit de 2 nombres est nul, alors au moins l'un des deux est nul.*

En d'autres termes : si $a \times b = 0$, alors soit $a = 0$ soit $b = 0$

Exemple 1.1 Résolution de $(3x - 4)(5x + 2) = 0$

On remarque un produit (de $3x - 4$ et de $5x + 2$). Il est donc nul si $3x - 4 = 0$ ou si $5x + 2 = 0$.

$$(3x - 4)(5x + 2) = 0$$

- soit $3x - 4 = 0$
 $3x = 4$
 $x = \frac{4}{3}$
- soit $5x + 2 = 0$
 $5x = -2$
 $x = -\frac{2}{5}$
- Les solutions sont $\frac{4}{3}$ et $-\frac{2}{5}$.

Ainsi, lorsqu'une expression du second degré se présente sous forme factorisée, on peut en trouver les racines (valeurs pour lesquelles elle s'annule). Avant de prétendre résoudre des équations du second degré, il faut donc bien maîtriser la factorisation (certaines expressions n'étant pas simple à factoriser, il faudra faire une factorisation double...)

2 Méthodes de factorisation

En général, il existe deux moyens pour factoriser une expression :

- repérer un facteur commun
- utiliser les identités remarquables

Il est généralement simple de repérer un facteur commun. C'est pourquoi je recommande de regarder systématiquement si cette méthode vous semble applicable avant d'essayer la deuxième.

2.1 Méthode du facteur commun

Méthode 1 (du facteur commun) *Lorsqu'une expression contient dans chaque terme de la somme un facteur commun, on peut alors factoriser en utilisant la propriété :*

$$a \times b + a \times c = a \times (b + c) \text{ appelée distributivité de la multiplication par rapport à l'addition}$$

Quelques exemples valent mieux qu'un long discours...

Exercice 2.1 Factoriser les expressions suivantes :

1. $(3x + 7)(2x - 4) + (3x + 7)(4x + 2)$.
2. $(2x - 5)^2 - (2x - 5)(6x - 1)$.
3. $6x(x - 2) - (x - 2)(x - 3)$.
4. $(15x - 5)(2x + 9) - (3x - 1)(4x - 1)$.
5. $(3x - 7)(3x + 7) - (3x - 7)(2x + 11)$.
6. $(2x - 4)^2 - (x - 2)(3x + 4)$.

Résolution 2.1 *Vous pouvez évidemment reprendre cette résolution en ajoutant des étapes si cela vous a paru trop rapide...*

1. $(3x + 7)(2x - 4) + (3x + 7)(4x + 2) = (3x + 7)[(2x - 4) + (4x + 2)] = (3x + 7)(6x - 2)$.
2. $(2x - 5)^2 - (2x - 5)(6x - 1) = (2x - 5)[(2x - 5) - (6x - 1)] = (2x - 5)(2x - 5 - 6x + 1) = (2x - 5)(-4x - 4)$.
3. $6x(x - 2) - (x - 2)(x - 3) = (x - 2)(6x - (x - 3)) = (x - 2)(5x + 3)$.
4. Ici, il ne semble pas y avoir de facteur commun. Mais on remarque une relation de proportionnalité entre $15x - 5$ et $5x - 3$, et :
 $(15x - 5)(2x + 9) - (3x - 1)(4x - 1) = (5 \times 3x - 5 \times 1)(2x + 9) - (3x - 1)(4x - 1) =$
 $5 \times (3x - 1)(2x + 9) - (3x - 1)(4x - 1) = (3x - 1)[5(2x + 9) - (4x - 1)] = (3x - 1)(10x +$
 $45 - 4x + 1) = (3x - 1)(6x + 46)$.

Je laisse les deux derniers exemples à la sagacité de mes lecteurs...

2.2 Méthode des identités remarquables

Méthode 2 (des identités remarquables) Lorsque l'on ne repère pas un facteur commun, il peut y avoir une identité remarquable :

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Il s'agit alors de repérer quelle identité utiliser puis d'identifier a et b pour factoriser en utilisant les formules ci-dessus.

Poursuivons avec quelques exemples :

Exemple 2.1 Factorisons les expressions suivantes :

1. $x^2 - 22x + 121$

On reconnaît la deuxième identité remarquable avec $a^2 = x^2$ donc $a = x$ puis $2 \times a \times b = 2 \times x \times 11$ donc $b = 11$. Il reste alors 121 qui correspond bien à 11^2 . Nous pouvons par conséquent écrire :

$$x^2 - 22x + 121 = (x - 11)^2$$

2. $36x^2 - 64$.

Après avoir remarqué que $36x^2$ n'est pas un carré (seul le x est mis au carré), on écrit :

$$36x^2 - 64 = (6x)^2 - 8^2 = (6x - 8)(6x + 8) \text{ en utilisant la troisième identité}$$

3. $9x^2 + 24x + 16 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 4 + 4^2 = (3x + 4)^2$

Ces exemples sont volontairement largement détaillés. Rien ne vous empêchera lors de vos examens de laisser moins d'étapes de calculs (si toutefois vous n'écrivez pas directement le résultat, car certaines calculatrices sont programmées pour effectuer ce genre de calculs).

Question Et si aucune de ces deux méthodes ne fonctionnent ?

En effet, il arrive (plutôt fréquemment même) de ne pas avoir de facteurs communs, auquel cas ce cours suggère que l'on pourra toujours utiliser une identité remarquable. Ce raisonnement est certes vrai dans les règles de votre prochain examen (brevet des collèges), mais l'avancée scientifique dépasse largement le cadre de tout examen. En outre, il me semble que vous disposez de toutes les capacités pour comprendre le petit raisonnement suivant :

Exemple 2.2 Factorisons l'expression : $x^2 - 12x + 12$. Pas de facteur commun.

Essayons donc d'appliquer une identité remarquable.

On remarque la deuxième identité en posant $a = x$. On obtient alors $2 \times x \times 11 = 2 \times a \times b$ ce qui force l'identification : $b = 11$. Ainsi afin de factoriser il faut avoir $x^2 - 12x + 121$, ce qui n'est pas. Mais nous pouvons toujours écrire :

$$x^2 - 12x + 12 = x^2 - 12x + 121 - 121 + 12 = (x^2 - 12x + 121) - 99 = (x - 11)^2 - 99.$$

Ensuite nous remarquons la possibilité d'utiliser la troisième identité (avec $a^2 = (x - 11)^2$ et $b^2 = \sqrt{99}^2$).

D'où : $x^2 - 12x + 12 = (x - 11)^2 - 99 = (x - 11 - \sqrt{99})(x - 11 + \sqrt{99})$ (et l'expression est factorisée).

Nous savons à présent factoriser. Outre notre satisfaction personnelle, et la joie d'avoir augmenté nos connaissances, vous êtes en droit de vous demander : "à quoi ça sert ?" et je suis dans l'obligation de vous répondre.

3 Applications

3.1 Résolution des équations du second degré

D'après la première partie, nous savons résoudre une équation de n'importe quel degré lorsque l'un de ses termes est nul et que l'autre se trouve sous forme factorisée. Aussi ne reste-t-il plus qu'à appliquer la méthode suivante :

Méthode 3 Pour résoudre une équation de degré 2 (ou plus), il faut :

- Passer tous les termes d'un côté de l'égalité
- Factoriser l'expression obtenue

Étudions quelques exemples.

Exemple 3.1 Résolution de $5x^2 - 10x = 5x + 5$

$$5x^2 - 10x - 5x - 5 = 0 \quad (\text{on passe tous les termes du côté gauche})$$

$$5x^2 - 15x - 5 = 0 \quad (\text{on regroupe et on remarque le 5 en facteur})$$

$$5(x^2 - 3x - 1) = 0 \quad (\text{le 5 se simplifie})$$

$$x^2 - 2 \times x \times \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - 1 = 0 \quad (\text{factorisation un peu difficile})$$

$$(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{13}{4} = 0 \quad (\text{et la troisième identité apparaît})$$

$$(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{\sqrt{13}^2}{2} = 0$$

$$(x - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2})(x - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}) = 0$$

On peut enfin conclure, l'un des facteurs étant nécessairement nul :

$$\text{Les solutions sont : } \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \text{ et } \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

3.2 signe d'une expression du second degré

4 Exercices

Exercice 4.1 Résoudre les équations suivantes :

1. $(11x - 5)(5x + 2) = 0$.
2. $(7x + 14)(12x - 46) = 0$.
3. $(\frac{4}{3}x - \frac{5}{6})(3x + \frac{9}{5}) = 0$.
4. $(3x - 15)(7x - 21)(-11x + 44) = 0$.

Exercice 4.2 Factoriser les expressions suivantes (en utilisant la méthode appropriée) :

1. $(3x - 5)(4x + 5) - (4x + 5)(2x + 7)$.
2. $(6x - 11)^2 + (6x - 11)(2x - 5)$.
3. $25x^2 - 144$.
4. $49x^2 + 70x + 25$.
5. $(4x + 3)(2x - 7) - (2x - 7)(3x + 2)$.
6. $9x^2 - 6x + 1$.
7. $(4x - 20)(x + 2) - (x - 5)(12x - 6)$.
8. $64x^2 - 32xy + 4y^2$.
9. $\frac{x^2}{4} - 5x + 25$.
10. $15x^2 - 30x + 15$.
11. $4x^2 + 12x + 9 - 9 - 72$.
12. $9x^2 - 30x - 75$.